

TD - formes quadratiques

Mathématiques pour économistes - ENSL Premaster

Janvier 2024

- **Forme bilinéaire.** $B(ax + x', y) = aB(x, y) + B(x', y)$
- **Symétrique.** $B(x, y) = B(y, x)$
- **Antisymétrique.** $B(x, y) = -B(y, x)$
- **Non-dégénérée.** $B(x, y) = 0 (\forall y) \implies x = 0$ (noyau à gauche ou à droite nul)
- **Définie.** $B(x, x) = 0 \implies x = 0$ (cône des vecteurs isotropes nul)
- **Positive.** $B(x, x) \geq 0$
- **Produit scalaire.** Forme bilinéaire symétrique (FBS) non-dégénérée positive.
- **Orthogonalité** de x et y pour une FBS B : $B(x, y) = 0$.
- **Complément orthogonal** de A : ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A .
- **Forme quadratique (FQ).** $Q(x) = B(x, x)$, où B est une FBS.
- **Matrice associée** à la FQ: M telle que ${}^T x M x = Q(x)$.
- **Rang** de la FQ = $\text{rg}M$.
- **Signature** de la FQ: $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ où p et n sont les nombres de valeurs propres respectivement positives et négatives de M .
- **Matrice définie positive** (resp. négative). Matrice associée à une FQ définie strictement positive (resp. négative).
- **Matrice semi-définie positive** (resp. négative). Matrice associée à une FQ positive (resp. négative).
- **Réduction** de la FQ: revient à diagonaliser M dans une base orthonormale.

Exercice 1.

A désigne un ensemble de vecteurs et E un espace vectoriel.

1. Soit $A_1 \subset A_2$, montrer que $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.
2. Montrer que $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. Montrer que $(A_1 \cup A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$.
4. Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$.
5. Montrer que $E_1^\perp + E_2^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$.

Exercice 2.

Soit B une FBS et Q la FQ associée.

1. Montrer que $2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$.
2. Montrer que $4B(x, y) = Q(x + y) - Q(x - y)$.

Exercice 3.

Soit B une FBS positive et Q la FQ associée.

1. Étudier le signe de $P(\lambda) = Q(\lambda x + y)$ et en déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que B définie $\iff B$ non-dégénérée.
3. Montrer l'inégalité de Minkowski: $\sqrt{Q(x + y)} \leq \sqrt{Q(x)} + \sqrt{Q(y)}$.
4. Supposons B définie. Quels sont les (x, y) tels que les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski soient des égalités ?
5. Montrer que $\sqrt{Q(\cdot)}$ définit une norme quand B est définie.

Exercice 4.

Soit une matrice symétrique $M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$.

1. Calculer $Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la FQ associée à M .

2. Montrer que si $a \neq 0$,

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} y \right)^2 + \frac{\det M}{a^2} y^2 \right]$$

3. Montrer que dans ce cas, Q est définie si et seulement si M est inversible.

4. Montrer que si $a = c = 0$,

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{\det M}{b} [(x+y)^2 - (x-y)^2]$$

5. Montrer que dans ce cas, Q peut être non-définie bien que M soit inversible.

6. Dédire un critère pour déterminer si une matrice 2×2 est (semi-)définie positive (négative).

7. (Prochain chapitre). Dédire un critère pour déterminer si la condition de premier ordre sur une fonction à deux variables donne un maximum, un minimum ou un point-selle.

Exercice 5.

Étudier les formes quadratiques suivantes (rang, signature).

1.

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$$

2.

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

3.

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = xy + yz + zt + tx$$

4.

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x^2 + (4 + \lambda)y^2 + (1 + 4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1 - \lambda)yz + 2\lambda yt + (1 - 4\lambda)zt$$

Exercice 6.

On se place cette fois dans l'espace des matrices carrées.

1. Montrer que $B(M, N) = \text{tr}^T MN$ est un produit scalaire.
2. Étudier les propriétés de la forme $B(M, N) = \text{tr} MN$.