TD : différentielles

Mathématiques pour économistes - ENSL Prémaster

Exercice 1.

Soit une fonction F à une variable et à valeur vectorielle $F : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On note, pour tout $x \in I$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que F est différentiable en x si et seulement si les f_i sont toutes dérivables en x.

2. On s'intéresse maintenant à la jacobienne de F:

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}$$

   Montrer que $dF(x)(h) = hJ_F(x)$, et conclure que F' est la jacobienne.

Exercice 2.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^d$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, où f et g sont différentiables en tout point de leur domaine de définition, respectivement l'ouvert U et l'ouvert V.

1. On suppose $p = 1$. Montrer que pour tout $x \in U$, $(g \circ f)'(x) = J_g(f(x))J_f(x)$. Rappeler la dimension de chacun des termes de cette formule.

2. On suppose $n = 1$. Montrer que pour tout $x \in U$, $\nabla(g \circ f)(x) =^T [J_f(x)]\ \nabla g(f(x))$. Rappeler la dimension de chacun des termes de cette formule.

Exercice 3.

Soit F une bijection sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, différentiable en tout point de U.

1. Justifier l'existence de la réciproque $G = F^{-1}$.
2. Donner une condition sur la jacobienne pour l'inversibilité de $dF(x)$.
3. On suppose cette condition satisfaite et G différentiable en tout point de U. Montrer que $dG(F(x) = (dF(x))^{-1}$.

Exercice 4.

Soit $F(x, y) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction à deux variables vectorielles et à valeur vectorielle, telle que les restrictions $f_{y_0} = F(\cdot, y_0)$ et $f_{x_0} = F(x_0, \cdot)$ sont des applications linéaires pour tout point (x_0, y_0) du domaine de définition de F.

1. On définit, pour un (x_0, y_0) donné, la fonction $G(x, y) = f_{y_0}(x) + f_{x_0}(y)$. Montrer que G est une application linéaire.
2. Montrer que F est différentiable en tout point de son domaine de définition et que sa différentielle en (x_0, y_0) est G.