TD - équations différentielles

Mathematiques pour économistes - ENSL Premaster

Janvier 2024

- ***équation***: l'inconnue est une fonction (équation fonctionnelle)
- ***différentielle***: une relation entre la fonction et ses dérivées
- ***ordinaire***: une fonction à une seule variable (il s'agit dans le cas contraire d'une *équation aux dérivées partielles*, hors programme)
- ***d'ordre*** n: l'ordre de dérivation le plus élevé dans l'équation
- ***autonome***: la variable (x dans $f(x)$) n'apparaît pas dans l'équation, qui peut donc s'écrire $F(f, f', ..., f^{(n)}) = 0$
- ***linéaire***: l'équation est une combinaison linéaire des dérivées: $\sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} = b$
- ***homogène***: $b = 0$ (dans le cas contraire, on parle d'équation ***avec second membre***, constant ou non)
- ***à coefficients constants***: $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{n+1}$

Exercice 1.

1. $k'(t) = i \in \mathbb{R}$
2. $k'(t) = it + j$, $(i, j) \in \mathbb{R}^2$
3. $k'(t) = \alpha k(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $k'(t) = \alpha k(t) + j$, $(\alpha, j) \in \mathbb{R}^2$
5. $k'(t) = \alpha t k(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $k'(t) = \alpha k(t) + jt$, $(\alpha, j) \in \mathbb{R}^2$
7. $k''(t) = c \in \mathbb{R}$

8. $k''(t) = ct + d$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$
9. $k''(t) = \alpha k'(t)$
10. $k''(t) = \alpha k'(t) + jt + c$, $(\alpha, j, c) \in \mathbb{R}^3$
11. $k''(t) = \alpha t k'(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
12. $k''(t) = \alpha k(t)$, $\alpha > 0$
13. $k''(t) = -\alpha k(t)$, $\alpha > 0$
14. $k''(t) = 2k'(t) - 2k(t)$
15. $k''(t) = 2k'(t) - k(t)$
16. $k''(t) = \alpha k(t) + e^{\beta t}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
17. $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = e^{\beta t} Q(t)$, $(a_k)_k \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}[t]$

Exercice 2.

Avec plusieurs équations différentielles (ou bien une équation différentielle pour une fonction à valeur vectorielle, ce qui revient au même), j'obtiens un ***système différentiel***.

On note souvent $x'(t) = \dot{x}$.

1. $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y \\ \dot{y} = \beta x \end{cases}$$
2. $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$,
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + e \\ \dot{y} = cx + dy + f \end{cases}$$
3. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$,
$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)x \\ \dot{y} = (\delta x - \gamma)y \end{cases}$$